Électromagnétisme – Chapitre 2

Électrostatique

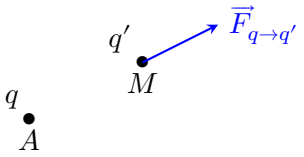
I. Champ électrostatique . . . 1
I.1. Champ créé par une charge ponctuelle . . . 1
I.2. Champ créé par une distribution continue de charges . . . 2
I.3. Symétries et invariances . . . 3
II. Potentiel électrostatique . . . 5
II.1. Définition . . . 5
II.2. Potentiel créé par une charge ponctuelle . . . 6
II.3. Énergie potentielle électrostatique . . . 6
II.4. Circulation du champ électrostatique . . . 7
II.5. Carte de champ électrostatique . . . 7
III. Théorème de Gauss . . . 9
III.1. Flux du champ électrique . . . 9
III.2. Énoncé du théorème . . . 9
III.3. Application au champ créé par une boule uniformément chargée . . . 10
IV. Condensateur plan . . . 11
IV.1. Modélisation du condensateur plan infini . . . 11
IV.2. Expression du champ électrostatique . . . 11
IV.3. Capacité . . . 12

Dans le cadre de l'électrostatique, nous nous limitons à l'étude des champs électriques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps, que l'on appelle alors **champs électrostatiques** $\vec{E}(M)$.

I. Champ électrostatique

I.1. Champ créé par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q située en A exerce une force sur une charge ponctuelle q' située en M qui est donnée par la **loi de Coulomb** :



$$\boxed{\vec{F}_{q\to q'} = \frac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^2}\,\vec{u}_{A\to M} = \frac{q\,q'}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}}$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide, et $\vec{u}_{A\to M} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$ un vecteur unitaire orienté de A vers M.

On définit le **champ électrostatique** créé par la charge q en tout point M de l'espace tel que :

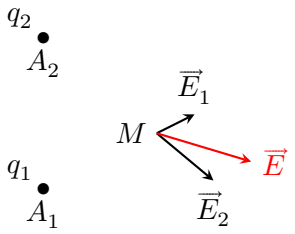
$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^2}\,\vec{u}_{A\to M} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}}.$$

La force exercée sur la charge q' par le champ $\vec{E}(M)$ peut alors s'exprimer :

$$\boxed{\vec{F}_{q\to q'} = q'\,\vec{E}(M)}.$$

En présence de plusieurs charges q_i situées en A_i, les forces exercées sur la charge q' s'additionnent. On en déduit alors le **principe de superposition** : le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est la somme des champs créés par chacune des charges, soit :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,A_iM^3}\,\overrightarrow{A_iM}.$$



Application :

> Calculons l'ordre de grandeur du champ électrostatique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène qui est perçu par son électron.
> Le noyau d'un atome d'hydrogène est composé d'un seul proton, sa charge est donc : $q = +e = 1{,}6.10^{-19}\,\mathrm{C}$.
> La distance entre le noyau et l'électron est : $r \sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$.
> On en déduit l'ordre de grandeur du champ électrostatique créé : $E = \dfrac{e}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \sim 10^{11}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

On donne quelques ordres de grandeur :

- champ électrostatique entre les armatures d'un condensateur chargé : $E \sim 10^4\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$;
- champ électrostatique à la surface de la Terre par temps sec : $E \sim 10^2\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$.

I.2. Champ créé par une distribution continue de charges

En présence d'un grand nombre de charges, il devient difficile de déterminer le champ électrostatique en additionnant les champs créés par chacune des charges, on décrit alors l'ensemble des charges par une distribution continue à une échelle mésoscopique (comme en mécanique des fluides).

Distribution volumique

Soit $\mathrm{d}\tau$ un volume élémentaire à l'échelle mésoscopique, centré autour du point A, et contenant une charge $\mathrm{d}q$.

On définit la **densité volumique de charges** autour du point A :

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}}$$

elle s'exprime en $\mathrm{C\cdot m^{-3}}$.

Le champ électrostatique créé en un point M par chaque volume élémentaire de charge $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau$ est :

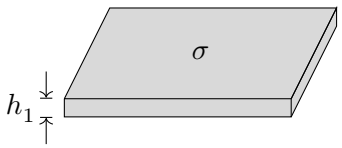
$$\mathrm{d}\vec{E}(M) = \frac{\mathrm{d}q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM} = \frac{\rho}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}\tau$$

d'où le champ électrostatique créé en un point M par une distribution volumique de charges :

$$\vec{E}(M) = \iiint_\tau \mathrm{d}\vec{E}(M) = \iiint_\tau \frac{\rho}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}\tau.$$

Distribution surfacique

Dans le cas d'une distribution volumique de charges dont l'épaisseur h_1 est très petite devant les deux autres dimensions, on peut l'assimiler à une distribution surfacique.
Soit $\mathrm{d}S$ une surface élémentaire à l'échelle mésoscopique, centrée autour du point A, et contenant une charge $\mathrm{d}q$. On définit la **densité surfacique de charges** autour du point A :



$$\boxed{\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}}$$

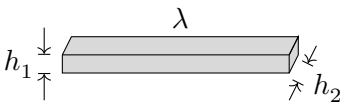
elle s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^{-2}}$.

Le champ électrostatique créé en un point M par une distribution surfacique de charges est :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}S.$$

Distribution linéique

Dans le cas d'une distribution volumique de charges dont l'épaisseur h_1 et la largeur h_2 sont très petites devant sa longueur, on peut l'assimiler à une distribution linéique.
Soit $\mathrm{d}\ell$ une longueur élémentaire à l'échelle mésoscopique, centrée autour du point A, et contenant une charge $\mathrm{d}q$. On définit la **densité linéique de charges** autour du point A :



$$\boxed{\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}}$$

elle s'exprime en $\mathrm{C \cdot m^{-1}}$.

Le champ électrostatique créé en un point M par une distribution linéique de charges est :

$$\vec{E}(M) = \int_L \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM^3}\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}\ell.$$

Application :

> Déterminons les expressions de la densité surfacique de charges σ et de la densité linéique de charges λ en fonction de ρ, h_1 et h_2 pour les cas précédents.
> Pour la distribution surfacique, un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau = h_1\,\mathrm{d}S$ contient une charge qui peut s'exprimer : $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \sigma\,\mathrm{d}S$, soit : $\rho\,h_1\,\mathrm{d}S = \sigma\,\mathrm{d}S$, d'où : $\sigma = h_1\,\rho$.
> Pour la distribution linéique, un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau = h_1\,h_2\,\mathrm{d}\ell$ contient une charge qui peut s'exprimer : $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \lambda\,\mathrm{d}\ell$, soit : $\rho\,h_1\,h_2\,\mathrm{d}\ell = \lambda\,\mathrm{d}\ell$, d'où : $\lambda = h_1\,h_2\,\rho$.

I.3. Symétries et invariances

Principe de Curie

Le **principe de Curie** énonce que :

- les symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

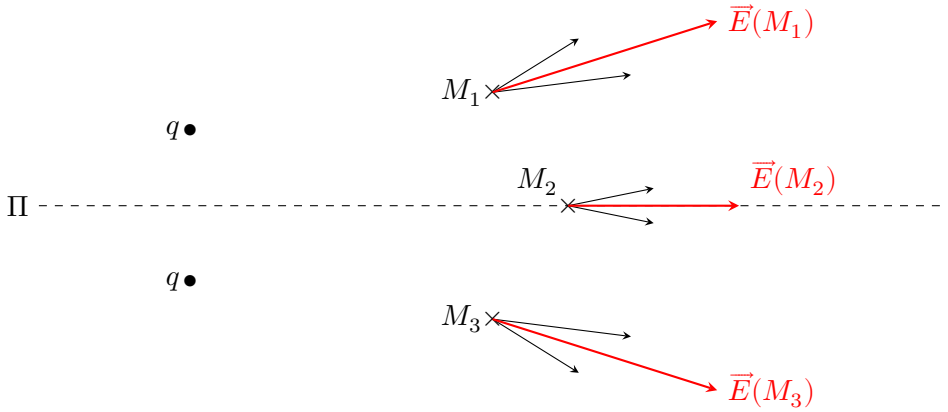
Ce principe est valable dans tous les domaines de la physique, et pas uniquement en électromagnétisme.

Appliqué à l'électrostatique, on en déduit que si une distribution de charges présente une certaine symétrie, alors on retrouve cette symétrie dans le champ électrostatique créé. L'étude des symétries permet donc souvent de déterminer la direction du champ créé par une distribution sans réaliser de calcul.

Symétrie

Un plan Π est un **plan de symétrie** de la distribution de charges si pour tout point A portant une charge, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) porte une charge identique.

Pour illustrer l'effet d'un plan de symétrie, on représente ci-dessous le champ électrostatique créé par deux charges identiques, avec $q > 0$, en différents points.



On observe que les champs $\vec{E}(M_1)$ et $\vec{E}(M_3)$ sont symétriques par rapport au plan Π, et que le champ $\vec{E}(M_2)$ est contenu dans le plan Π.

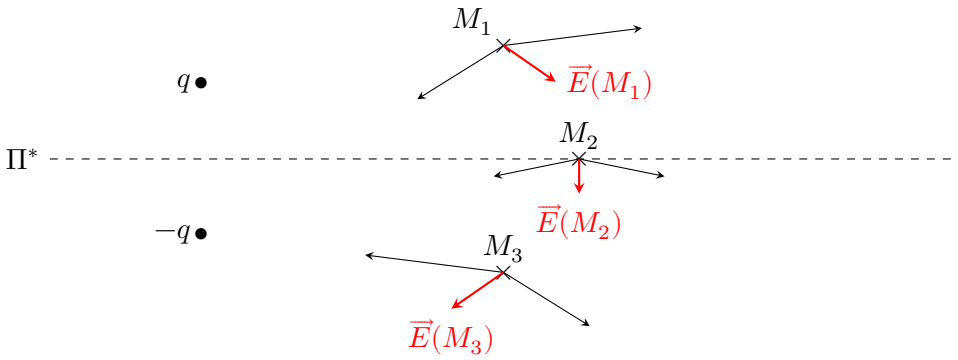
En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est **symétrique** par rapport à un plan de symétrie Π ;
- pour tout point M situé sur un plan de symétrie Π, le champ $\vec{E}(M)$ est **contenu** dans ce plan.

Antisymétrie

Un plan Π^* est un **plan d'antisymétrie** de la distribution de charges si pour tout point A portant une charge, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) porte une charge opposée.

Pour illustrer l'effet d'un plan d'antisymétrie, on représente ci-dessous le champ électrostatique créé par deux charges opposées, avec $q > 0$, en différents points.



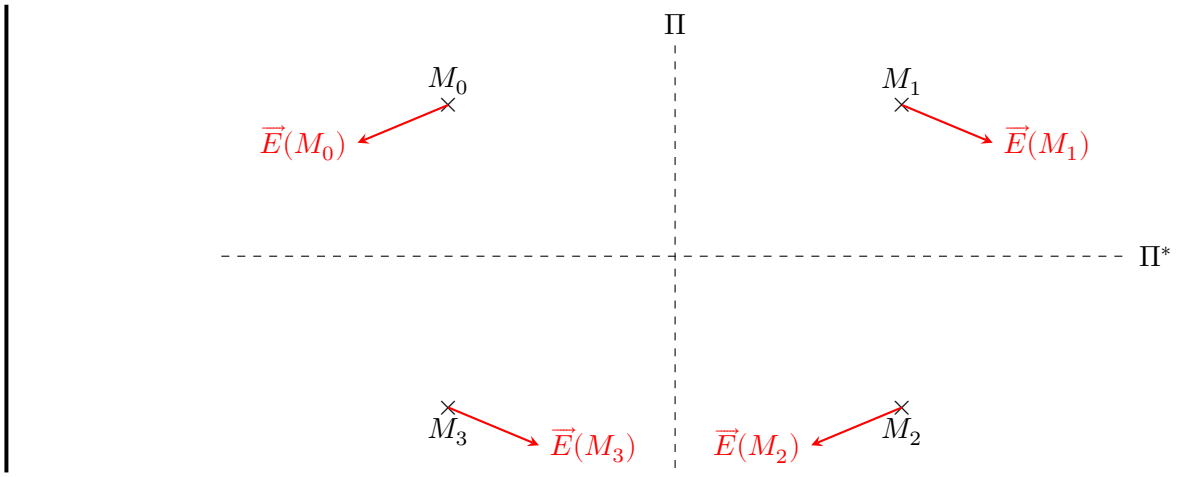
On observe que les champs $\vec{E}(M_1)$ et $\vec{E}(M_3)$ sont antisymétriques par rapport au plan Π^*, et que le champ $\vec{E}(M_2)$ est perpendiculaire au plan Π^*.

En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est **antisymétrique** par rapport à un plan d'antisymétrie Π^* ;
- pour tout point M situé sur un plan d'antisymétrie Π^*, le champ $\vec{E}(M)$ est **perpendiculaire** à ce plan.

Application :

> On suppose que le champ électrostatique au point M_0 est connu, et que la distribution de charges présente un plan de symétrie Π et un plan d'antisymétrie Π^*.
> Représentons le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ aux points M_1, M_2 et M_3.



Invariance

Comme pour les symétries, les **invariances** d'une distribution de charges se retrouvent dans le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé.

On peut donner quelques exemples :

- si une distribution de charges est invariante par translation selon l'axe x en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire que la densité de charges est identique quelle que soit la coordonnée x du point $M(x,y,z)$ considéré, alors le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de la coordonnée x ;
- si une distribution de charges est invariante par rotation selon l'angle θ en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire que la densité de charges est identique quelle que soit la coordonnée θ du point $M(r,\theta,z)$ considéré, alors le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de la coordonnée θ.

Application :

À l'aide des symétries et des invariances, déterminons la direction et les variables dont dépend le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par une boule centrée en O uniformément chargée en volume.

On considère un point $M(r,\theta,\varphi)$ en coordonnées sphériques.

Étude des symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\vec{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\vec{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r$.

Étude des invariances : la distribution est invariante par rotation selon θ et φ, d'où : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

II. Potentiel électrostatique

II.1. Définition

Pour tout champ électrostatique $\vec{E}$, on peut associer un **potentiel électrostatique** V défini tel que :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V}$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}$ l'**opérateur gradient**, dont on rappelle l'expression en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{e}_z.$$

Un potentiel électrostatique s'exprime en volt (V).

II.2. Potentiel créé par une charge ponctuelle

Le potentiel électrostatique créé en tout point M de l'espace par une charge ponctuelle q située en A s'exprime :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,AM} + \text{cste}}$$

il est défini à une constante près.

Application :

Déterminons l'expression en coordonnées sphériques du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q située en O, sachant qu'avec ce système de coordonnées :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

En coordonnées sphériques, le potentiel électrostatique créé par cette charge s'exprime : $V(M) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} + \text{cste}$.

Comme $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, on obtient : $\vec{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\,\vec{e}_r = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r$.

Comme pour le champ électrostatique, le **principe de superposition** s'applique au potentiel électrostatique : le potentiel électrostatique créé par un ensemble de charges q_i situées en A_i est la somme des potentiels créés par chacune des charges, soit :

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,A_iM} + \text{cste}.$$

II.3. Énergie potentielle électrostatique

On rappelle qu'une force $\vec{F}$ est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_\text{p}$ telle que :

$$\vec{F} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_\text{p}.$$

La force $\vec{F}$ subie par une charge ponctuelle q en présence d'un champ électrostatique $\vec{E}$ peut s'exprimer :

$$\vec{F} = q\,\vec{E} = -q\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,(q\,V)$$

elle est donc conservative, et dérive d'une **énergie potentielle électrostatique** :

$$\boxed{\mathcal{E}_\text{pé} = q\,V + \text{cste}}$$

qui est définie à une constante près, comme le potentiel électrostatique.

Application :

Un électron, de vitesse initiale négligeable, est accéléré entre les deux extrémités d'une cavité horizontale présentant une différence de potentiel $U = V_2 - V_1 = 10\,\text{kV}$.
On rappelle :

- la masse d'un électron : $m = 9{,}11.10^{-31}\,\text{kg}$;
- la charge élémentaire : $e = 1{,}60.10^{-19}\,\text{C}$.

En supposant que l'électron conserve son énergie mécanique dans la cavité, déterminons sa vitesse en sortie de la cavité.

On exprime l'énergie mécanique de l'électron :

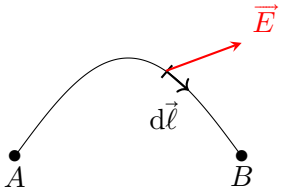
- à l'entrée : $\mathcal{E}_{\text{m,e}} = \mathcal{E}_{\text{c,e}} + \mathcal{E}_{\text{pp,e}} + \mathcal{E}_{\text{pé,e}} = 0 + m\,g\,z - e\,V_1 + \text{cste}$;
- à la sortie : $\mathcal{E}_{\text{m,s}} = \mathcal{E}_{\text{c,s}} + \mathcal{E}_{\text{pp,e}} + \mathcal{E}_{\text{pé,e}} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{s}}^2 + m\,g\,z - e\,V_2 + \text{cste}$.

Comme son énergie mécanique se conserve, on obtient : $m\,g\,z - e\,V_1 + \text{cste} = \dfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{s}}^2 + m\,g\,z - e\,V_2 + \text{cste}$, d'où : $v_{\text{s}} = \sqrt{\dfrac{2\,e\,(V_2 - V_1)}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\,e\,U}{m}} = 5{,}9.10^7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

II.4. Circulation du champ électrostatique

La **circulation du champ électrostatique** $\vec{E}$ le long d'un chemin allant de A à B par un ensemble de déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell}$ est définie telle que :

$$\mathcal{C}_{A\to B} = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,.$$



On peut exprimer cette circulation en fonction du potentiel électrostatique :

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_A^B \mathrm{d}V$$

car $\mathrm{d}V = \overrightarrow{\text{grad}}\,V\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ par définition du gradient, d'où finalement :

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = V(A) - V(B)\,.$$

La circulation du champ électrostatique correspond donc à la variation du potentiel électrostatique. On peut remarquer que celle-ci ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des points A et B.

II.5. Carte de champ électrostatique

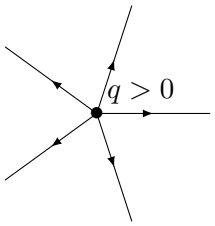
Ligne de champ et tube de champ

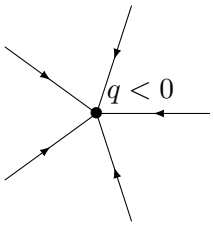
Comme pour le champ magnétique $\vec{B}(M)$, et de façon analogue aux lignes de courant et aux tubes de courant en mécanique des fluides, on définit pour le champ électrostatique $\vec{E}(M)$:

- une **ligne de champ** comme une ligne tangente en chacun de ses points au champ électrostatique $\vec{E}(M)$;
- un **tube de champ** comme un ensemble de lignes de champ passant par un contour fermé.

On peut préciser l'orientation des lignes de champ au voisinage d'une charge ponctuelle :

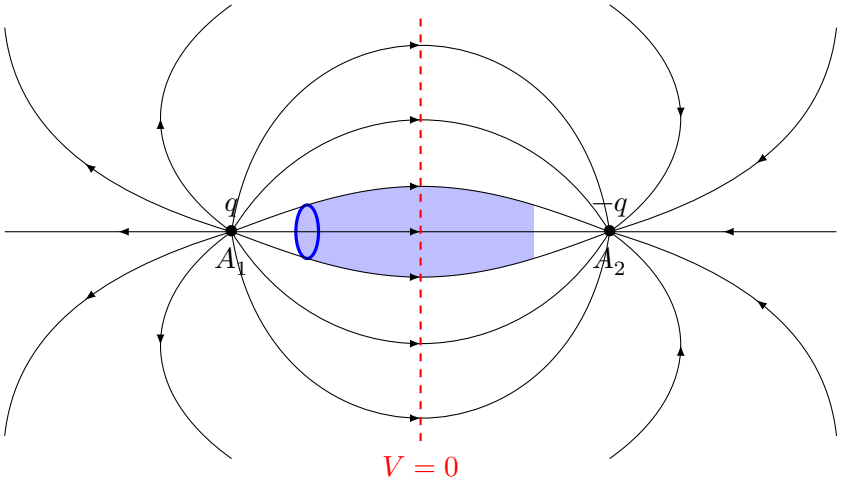
- comme une charge $q > 0$ crée un champ orienté selon $+\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques, on en déduit que les lignes de champ s'éloignent des charges positives ;
- comme une charge $q < 0$ crée un champ orienté selon $-\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques, on en déduit que les lignes de champ se rapprochent des charges négatives.





Application :

En présence de ces charges opposées, avec $q > 0$, représentons des lignes de champ et un tube de champ.



Entre deux points M et M' qui se suivent le long d'une ligne de champ, la circulation du champ électrostatique peut s'exprimer :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = V(M) - V(M')$$

avec $\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} > 0$ par définition d'une ligne de champ, d'où :

$$V(M') < V(M)$$

on en déduit alors que le potentiel électrostatique **décroit** le long d'une ligne de champ.

Surface équipotentielle

De façon analogue aux surfaces équiphases en optique, on définit pour le potentiel électrostatique $V(M)$:

- une **surface équipotentielle** comme une surface continue de l'espace sur laquelle le potentiel électrostatique $V(M)$ est uniforme.

Application :

Représentons la surface équipotentielle correspondant à $V = 0$ pour l'application précédente, en supposant que le potentiel électrostatique s'annule à l'infini.

Pour l'application précédente, le potentiel électrostatique s'exprime : $V(M) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,A_1M} + \dfrac{-q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,A_2M} + \text{cste}$, avec cste $= 0$ comme il s'annule à l'infini.
La surface équipotentielle correspondant à $V = 0$ est donc l'ensemble des points M tels que : $A_1M = A_2M$, et on peut la représenter.

Entre deux points M et M' proches sur une même surface équipotentielle, la circulation du champ électrostatique peut s'exprimer :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = V(M) - V(M')$$

avec $V(M) = V(M')$ par définition d'une surface équipotentielle, d'où :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

on en déduit alors que les surfaces équipotentielles sont **orthogonales** aux lignes de champ.

III. Théorème de Gauss

III.1. Flux du champ électrique

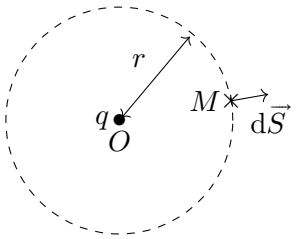
Le **flux du champ électrique** $\vec{E}$ à travers une surface orientée S est défini tel que :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}.$$

Dans le cas d'une surface fermée, c'est-à-dire une surface définissant un volume, et orientée vers l'extérieur, le flux du champ électrique sortant à travers cette surface est noté $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

Application :

Exprimons le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q située en O sortant à travers une sphère de rayon r centrée en O.



Le champ électrostatique créé par la charge s'exprime en coordonnées sphériques : $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r$.

On en déduit alors l'expression du flux sortant : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \left(\dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r\right) \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = \oiint_S \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\mathrm{d}S$, avec r qui est constant sur la surface de la sphère, d'où : $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \oiint_S \mathrm{d}S = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,4\,\pi\,r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

III.2. Énoncé du théorème

On admet le **théorème de Gauss** :

- le flux du champ électrostatique $\vec{E}$ sortant à travers une surface fermée S est :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

  avec Q_{int} la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

Pour appliquer le théorème de Gauss, on utilisera toujours la méthodologie suivante :

1. choisir un système de coordonnées adapté ;
2. étudier les symétries de la distribution de charges pour obtenir la direction du champ $\vec{E}(M)$;
3. étudier les invariances de la distribution de charges pour obtenir les variables dont dépend le champ $\vec{E}(M)$;
4. définir une surface fermée S, appelée **surface de Gauss**, permettant d'exprimer facilement $\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$:
   - soit avec des surfaces telles que $\vec{E}$ et $\mathrm{d}\vec{S}$ sont colinéaires, on a alors : $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\,\mathrm{d}S$,

- soit avec des surfaces telles que $\overrightarrow{E}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ sont orthogonaux, on a alors : $\overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=0$,

5. exprimer la charge électrique Q_{int} contenue à l'intérieur de la surface de Gauss ;
6. appliquer le théorème de Gauss pour en déduire le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$.

III.3. Application au champ créé par une boule uniformément chargée

On considère une boule de rayon R centrée en O contenant une densité volumique de charges uniforme ρ.

Nous allons déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r,\theta,\varphi)$ en coordonnées sphériques.

Étude des symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\overrightarrow{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que :

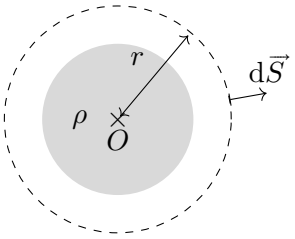
$$\overrightarrow{E}(M)=E(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r.$$

Étude des invariances : la distribution est invariante par rotation selon θ et φ, d'où :

$$\overrightarrow{E}(M)=E(r)\,\vec{e}_r.$$

Définition de la surface de Gauss : on choisit une sphère de rayon r centrée en O, d'où :

$$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=\oiint_S (E(r)\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r)=\oiint_S E(r)\,\mathrm{d}S=E(r)\oiint_S \mathrm{d}S=E(r)\,4\,\pi\,r^2.$$



Expression de la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss : il faut distinguer deux cas :

- si $r\geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution, Q_{int} correspond alors à la charge totale de la distribution, soit : $Q_{\text{int}}=\dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho$;
- si $r\leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe seulement une partie de la distribution, Q_{int} correspond alors à la charge contenue dans cette sphère, soit : $Q_{\text{int}}=\dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$.

Application du théorème de Gauss :

$$\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}=\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

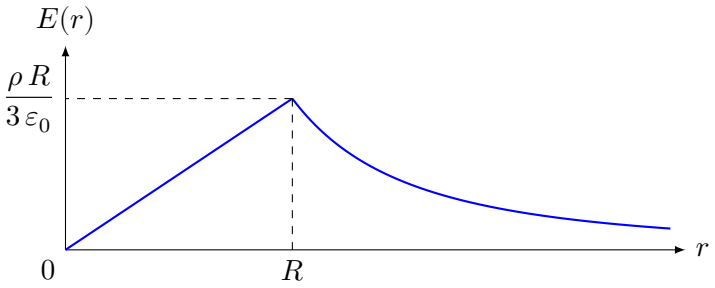
soit :

$$E(r)\,4\,\pi\,r^2=\begin{cases}\dfrac{\frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r\leqslant R\\[2ex] \dfrac{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r\geqslant R\end{cases}$$

d'où on en déduit le champ électrostatique :

$$\overrightarrow{E}(M)=\begin{cases}\dfrac{\rho\,r}{3\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r\leqslant R\\[2ex] \dfrac{\rho\,R^3}{3\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r\geqslant R\end{cases}.$$

On peut représenter son évolution :

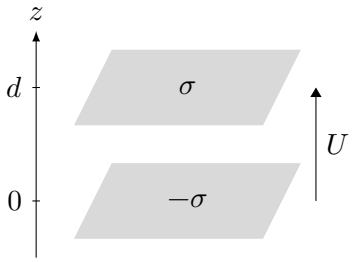


On constate que le champ électrostatique est continu en $r = R$ car nous avons considéré une distribution volumique de charges. Ce n'est pas toujours le cas avec une distribution surfacique ou linéique de charges.

IV. Condensateur plan

IV.1. Modélisation du condensateur plan infini

Un **condensateur plan** peut être modélisé par deux armatures conductrices planes de surface S, en face l'une de l'autre, et séparées par une distance d. Si cette distance est petite devant la taille des armatures, on peut négliger les effets de bords, et assimiler les armatures à des plans infinis. Lorsque le condensateur est soumis à une tension U, c'est-à-dire à une différence de potentiel entre ses deux armatures, un champ électrostatique $\vec{E}$ apparait entre les armatures où s'accumule des charges opposées.
On suppose que les deux armatures sont uniformément chargées en surface, et on note :



- σ la densité surfacique de charges sur l'armature située en $z = d$;
- $-\sigma$ la densité surfacique de charges sur l'armature située en $z = 0$.

IV.2. Expression du champ électrostatique

À l'aide du théorème de Gauss, on peut montrer que :

- l'armature située en $z = d$ crée un champ électrostatique :

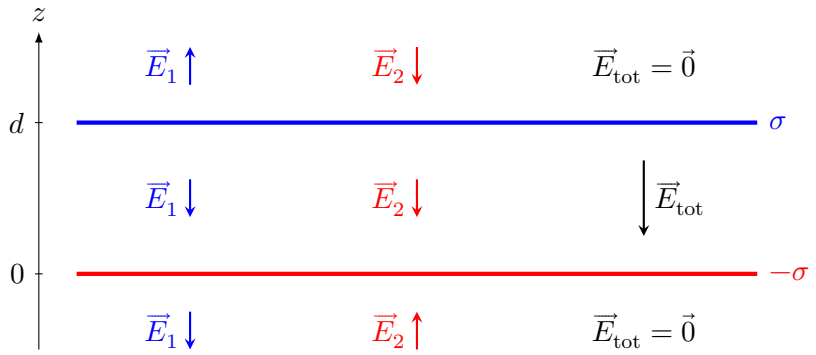
$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z > d \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z < d \end{cases}$$

- l'armature située en $z = 0$ crée un champ électrostatique :

$$\vec{E}_2(M) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}.$$

Avec le principe de superposition, on peut ainsi exprimer le champ électrostatique résultant :

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \begin{cases} \vec{0} & \text{pour } z > d \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z & \text{pour } 0 < z < d \\ \vec{0} & \text{pour } z < 0 \end{cases}.$$



Dans le cadre de cette modélisation, le champ électrostatique est uniforme entre les armatures, et nul en dehors.

IV.3. Capacité

On rappelle que la **capacité** C d'un condensateur relie la charge $Q > 0$ portée par l'une des armatures à la tension $U > 0$ à ses bornes telle que :

$$\boxed{Q = C\,U}.$$

Application :

Déterminons l'expression de la capacité d'un condensateur plan en fonction de ses paramètres géométriques.
La charge totale portée par l'armature située en $z = d$ est : $Q = \sigma\,S$.
La tension à ses bornes correspond à la différence de potentiel : $U = V(d) - V(0)$, où le potentiel entre les armatures est relié au champ électrostatique tel que : $E_{\text{tot}} = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$, d'où : $V(z) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,z + \text{cste}$, soit : $U = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,d$.
La capacité du condensateur plan vérifie alors la relation : $\sigma\,S = C\,\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\,d$, d'où finalement : $C = \dfrac{\varepsilon_0\,S}{d}$.